TUTORATO ANALISI I – 03/11/23

CALCOLO DI LIMITI DI SUCCESSIONI

Esercizio 1 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{n\pi - \sin\frac{1}{n}}{n+2}\right)\tan\sqrt{\frac{(-1)^n+2}{n\cos\frac{1}{n}}}$

Soluzione

$$n \to +\infty \implies \frac{1}{n} \xrightarrow[n]{} 0 \implies \sin\frac{1}{n} \xrightarrow[n]{} 0$$

- Guardo il primo fattore:

$$\frac{n\pi - \sin\frac{1}{n}}{n+2} = \underbrace{\frac{n\pi}{n+2}}_{\to\pi} - \underbrace{\frac{\sin 1/n}{n+2}}_{\to 0} \xrightarrow[n]{} \pi$$

$$\lim_{n} \frac{n}{n+2} = 1 \qquad \sin\frac{1}{n} \to 0, \quad n+2 \to +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{n\pi - \sin\frac{1}{n}}{n+2}\right) = \cos(\pi) = -1$$

Quindi il limite diventa $\displaystyle(-1)\cdot\lim_{n\to+\infty}\tan\sqrt{\frac{(-1)^n+2}{n\cos\frac{1}{n}}}$

- Guardo il secondo fattore:

$$n\cos\frac{1}{n}: \qquad \frac{1}{n} \to 0 \implies \cos\frac{1}{n} \to \cos 0 = 1$$

$$n\cos\frac{1}{n} \longrightarrow +\infty \cdot 1 = +\infty$$

$$(-1)^n + 2 = \begin{cases} 3, & n \text{ PARI} \\ 1, & n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

non esiste il $\displaystyle\lim_{n}\ (-1)^n+2$

$$1 \leq (-1)^n + 2 \leq 3 \quad , \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\underbrace{n \cos \frac{1}{n}}_{\to +\infty}}}_{\to 0} \leq \frac{(-1)^n + 2}{n \cos \frac{1}{n}} \leq \underbrace{\frac{3}{\underbrace{n \cos \frac{1}{n}}_{\to +\infty}}}_{\to 0}$$

Applichiamo il Teorema dei due carabinieri:

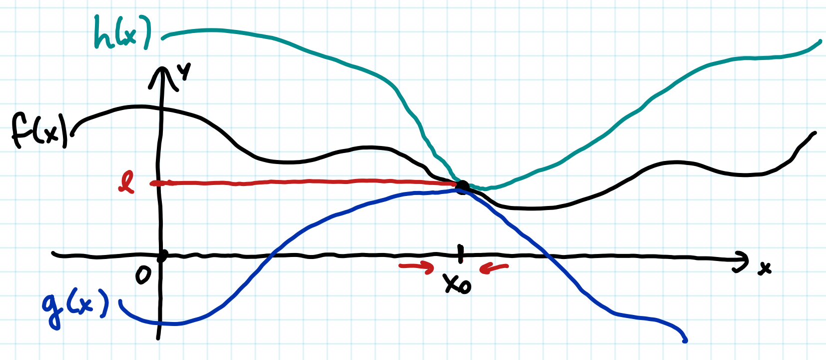
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n + 2}{n \cos \frac{1}{n}} = 0 \quad \text{e quindi} \quad \lim_{n \to +\infty} \mathrm{Tan} \sqrt{\frac{(-1)^n + 2}{n \cos \frac{1}{n}}} = 0 .$$

In conclusione, il limite è $-1 \cdot 0 = 0$.

Teorema dei due carabinieri: visualizzazione grafica INTUITIVA

$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$

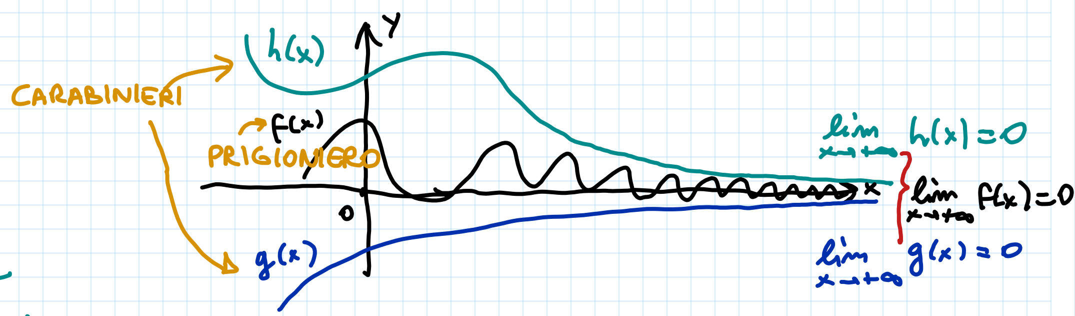
$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$



Se $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$,

allora anche

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$



f è «schiacciata» da g e h in un intorno di x_0

Esercizio 2 $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{n^4+3n^2-n+1}-n}{\sin\frac{1}{n}}$$

Soluzione

Trattiamo preliminarmente $\sin\frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{1}{n} \underset{t=\frac{1}{n}}{=} \lim_{t\to0^+}\frac{\sin t}{t} = 1$$

moltiplico e diviso per n

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(\sqrt[4]{n^4+3n^2-n+1}-n\right)}{\underbrace{n\sin\frac{1}{n}}_{\to 1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[4]{n^4\left(1+3/n^2-1/n^3+1/n^4\right)}-n\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\left(\underset{|n|=n}{n}\sqrt[4]{1+3/n^2-1/n^3+1/n^4}-n\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^2\left(\underbrace{\sqrt[4]{1+\underbrace{\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}_{\to 0}}}_{\to 1}-1\right) = +\infty\cdot 0$$ forma indeterminata

$$= \lim_{n\to+\infty} n^2\left(\left(1+\underbrace{\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}_{\to 0}\right)^{1/4}-1\right)$$

Ci riconduciamo al limite notevole $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^2\cdot\underbrace{\frac{\left(1+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)^{1/4}-1}{\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}}_{\to 1/4}\cdot\left(\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right) =$$

$$y = \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}\right) \cdot \lim_{y\to 0^+} \frac{(1+y)^{1/4} - 1}{y} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(3 - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Esercizio 3 $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\sin x} - 1}{x}$ [Foglio 3, 3.u)]

Soluzione

Tecnica standard: $x^{\sin x} = e^{\log(x^{\sin x})} = e^{\sin x \log x}$
$(x>0)$

log è la funzione inversa dell'esponenziale $\log(e^x) = x$
$e^{\log(x)} = x$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin x \cdot \log x} - 1}{x}$$

Dobbiamo ricondurci al limite notevole $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} = 1$

Ma prima dobbiamo verificare SE $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \sin x \log x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \cdot \log x = 0 \cdot (-\infty) \text{ forma indeterminata}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot x \log x = \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}}_{=1} \cdot \lim_{x\to 0^+} x \log x =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} x \log x \underset{t = \frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{\log(1/t)}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log(t^{-1})}{t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{\log t}{t}\right) = -\underbrace{\lim_{t\to+\infty}\frac{\log t}{t}}_{=0} = 0.$$

$= 0$ limite notevole
confronto tra infiniti

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\sin x\log x}-1}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{e^{\sin x\log x}-1}{\sin x\log x}\cdot\frac{\sin x\log x}{x} =$$

$t = \sin x \log x$

$$= \underbrace{\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}}_{=1}\cdot\lim_{x\to0^+}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to1}\underbrace{\log x}_{\to-\infty} = 1\cdot1\cdot(-\infty) = -\infty.$$

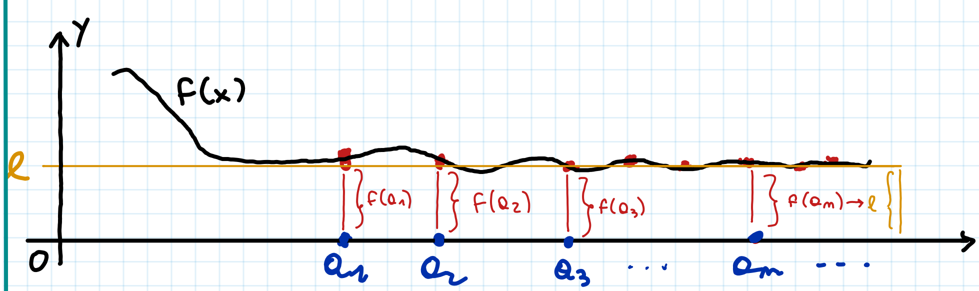
Osservazione
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log x}{x^\alpha} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty.$$
$\alpha > 0$

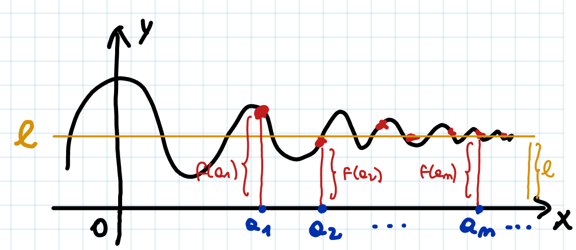
Esercizio 4 $\lim_{x\to+\infty} x(2+\sin x)$

Soluzione

Sostituendo, trovo $(+\infty)\cdot(2+???)$ $\quad\lim_{x\to+\infty}\sin x$ NON ESISTE

Richiamo: se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, allora per ogni successione $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, si ha $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \ell$





Quindi se trovo due successioni a_n, b_n tali che

$\lim_n a_n = +\infty$, $\lim_n b_n = +\infty$ ma $\lim_n f(a_n) \neq \lim_n f(b_n)$

ho dimostrato che $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ NON ESISTE

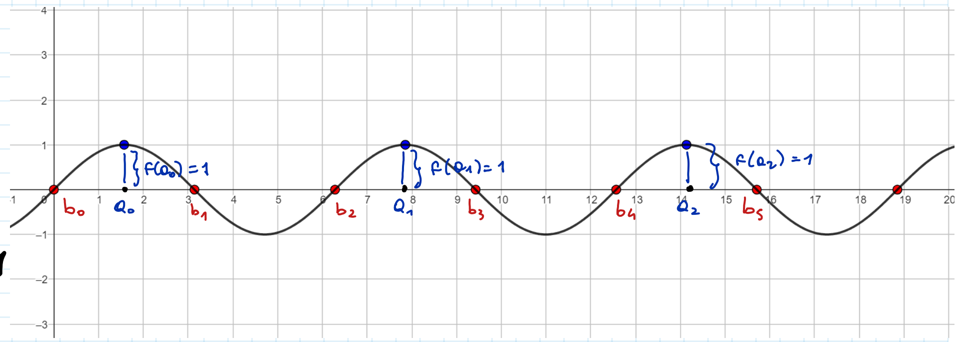
Ad esempio per $f(x) = \sin x$:

$a_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \xrightarrow[n]{} +\infty$

$b_n = n\pi \xrightarrow[n]{} +\infty$

$f(a_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \xrightarrow[n]{} 1$

$f(b_n) = \sin(n\pi) = 0 \xrightarrow[n]{} 0$



Torniamo a $\lim_{x \to +\infty} x(2 + \sin x)$. Sostituendo, trovo

$+\infty \cdot (\underbrace{2 + \text{qualcosa che è compreso tra } -1 \text{ e } 1}_{\text{qualcosa compreso tra } 1 \text{ e } 3})$, quindi il limite è $+\infty$.

Questo argomento è piuttosto INFORMALE, lo si giustifica rigorosamente sfruttando il Teorema dei due Carabinieri:

$$-1 \le \sin x \le 1$$

somma 2 ai tre membri

$$1 \le 2 + \sin x \le 3$$

per $x > 0$, moltiplico per x i tre membri

$$\underbrace{x}_{\to +\infty} \le x(2 + \sin x) \le \underbrace{3x}_{\to +\infty}$$

per $x \to +\infty$ gli estremi $x, 3x$ tendono a $+\infty$.

$\Rightarrow$ per il Teorema dei due Carabinieri $\lim_{x \to +\infty} x(2 + \sin x) = +\infty$

Esercizio 5 $\lim_{x \to +\infty} x(1+\sin x)$

Soluzione

Cerchiamo di emulare il ragionamento precedente:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$0 \leq 1+\sin x \leq 2$$

Per $x > 0$ $\underbrace{0}_{\to 0} \leq x(1+\sin x) \leq \underbrace{2x}_{\to +\infty}$ Niente da fare...

Il caso che dà problemi è quello in cui $1+\sin x = 0$

Perché?

Se fosse $1+\sin x \geq \varepsilon > 0$ per ogni $x > 0$, avremmo

$$\varepsilon \leq 1+\sin x \leq 2$$

$$\underbrace{\varepsilon \cdot x}_{\to +\infty} \leq \underbrace{x(1+\sin x)}_{\substack{\to +\infty \\ \text{per Carabinieri}}} \leq \underbrace{2x}_{\to +\infty}$$

Ma questo non succede perché esistono valori di x per cui

$$\sin x + 1 = 0$$

$$\sin x + 1 = 0 \iff \sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

è una successione di numeri per cui $\sin(\cdot)+1=0$

Considero la successione $a_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$.

$$\lim_n a_n = \lim_n \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = +\infty$$

$$f(x) = x\,(1+\sin x)$$

$$f(a_n) = a_n\,(1+\underbrace{\sin(a_n)}_{-1}) = 0$$

$$\sin(a_n) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$$

Ho trovato una successione a_n di numeri (che tende a $+\infty$) sui quali la funzione $f(x)$ restituisce sempre 0

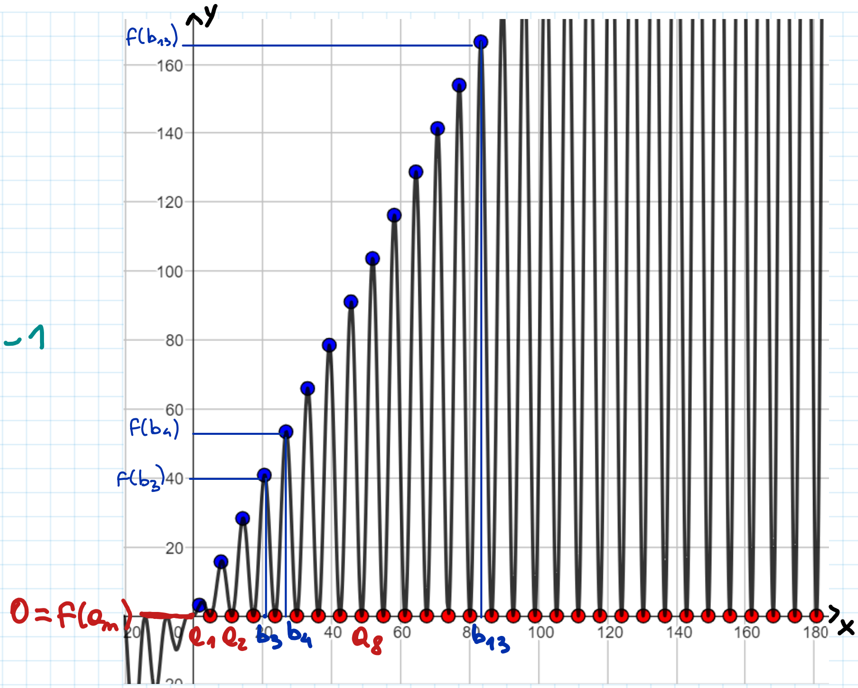


Grafico di $y = f(x) = x\,(1+\sin x)$

Ora considero la successione $b_n = \frac{\pi}{2}+2n\pi$ scelta in modo che $\sin(b_n)=1$

e trovo $\lim_{n} b_n = \lim_{n}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = +\infty$

e $f(b_n) = b_n\,(1+\underbrace{\sin(b_n)}_{=1}) = 2\,b_n = \pi+4n\pi$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \lim_{n\to+\infty}(\pi+4n\pi) = +\infty.$$

Quindi il limite $\lim_{x\to+\infty} x\,(1+\sin x)$ NON esiste.